

الاشتقاق و تطبيقاته

<p style="text-align: center;">1 ع رياضيات الدرس 1 الدورة الثانية 12 ساعة</p>	<p style="text-align: center;">القدرات المنتظرة</p> <p>تقريب دالة بجوار نقطة بدالة تألفية؛ التعرف على أن العدد المشتق للدالة في x_0 هو المعامل الموجه لمماس منحناها في النقطة التي أفصوفاً x_0؛ التعرف على المشتقة الأولى للدوال المرجعية التمكن من تقنيات حساب مشتقة دالة تحديد معادلة للمماس لمحنى دالة في نقطة وإنشاؤه؛ تحديد رتبة دالة انطلاقاً من دراسة إشارة مشتقتها؛ تحديد إشارة دالة انطلاقاً من جدول تغيراتها أو من تمثيلها للمباني؛ حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقيم القصوية؛ تطبيق الاشتقاق في حساب بعض النهايات</p>
<p style="text-align: center;">1 ع تجريبية الدرس 3 الدورة الثانية 10 ساعات</p>	

1- الاشتقاق في نقطة / نشاط

بينت تجربة الفيزياء هند السقوط الحر لجسم بدن سرعة بدئية أي $v_0 = 0$ في اللحظة $t = 0$ تكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالدالة الزمنية $d = f(t) = 5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و $d = f(t)$ المسافة بالمتر

1- بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين t و $t+h$ حيث $h \neq 0$ و $t+h > 0$ هي $10t + 5h$

2- نضع $t = 0,5s$

أ/ أملئ الجدول التالي

0,01	0,001	0,0001	-0,0001	-0,001	-0,01	h
						$t+h$
						السرعة المتوسطة بين t و $t+h$

ب/ باستعمال الجدول تضمن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول h الى 0

ج/ أحسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ ثم قارنها مع نتيجة ب

العدد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h}$ يسمى السرعة اللحظية للجسم عند اللحظة $t = 0,5s$

و يسمى أيضا العدد المشتق للدالة f عي النقطة $t_0 = 0,5$

نكتب في هذه الحالة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,5+h) - f(0,5)}{h} = f'(0,5)$

ب- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا وجد عدد حقيقي l حيث $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$

ونرمز لها.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0 ونرمز له بـ $f'(x_0)$.

نكتب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

ملاحظة: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال: نعتبر $f(x) = x^2 + 2x$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 1 و حدد العدد المشتق في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في 1 و $f'(1) = 4$

ج) الدالة التالفية المماسية لدالة

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{نضع} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad / \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

أي أنه بجوار x_0 لدينا $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

الدالة $x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة x_0

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة x_0

هي الدالة $g : x \rightarrow f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

تمرين نعتبر $f(x) = \sqrt{x}$

(1) حدد الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة 1

(2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

الجواب

$$/1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

ومنه الدالة التالفية المماسية لدالة f في النقطة 1 هي الدالة $g : x \rightarrow \frac{1}{2}(x - 1) + 1$

أي $g : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

لدينا $1 \approx 0,99$ ومنه $\sqrt{0,99} = f(0,99) \approx g(0,99) = 0,5 \times 0,99 + 0,5 = \dots$

لدينا $1 \approx 1,001$ ومنه $\sqrt{1,001} = f(1,001) \approx g(1,001) = 0,5 \times 1,001 + 0,5 = \dots$

2 - الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على

اليمين في x_0 و نرمل لها بـ $f'_d(x_0)$.

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{نكتب} \quad x_0 \text{ على اليمين في } f$$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية أعلى اليسار في x_0 نرسم لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ملاحظة

$$f'_g(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ و } f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ب - خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

تمرين نعتبر $f(x) = x^2 + |x|$ أدرس قابلية اشتقاق f في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1=1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f'_d(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x-1=-1$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f'_g(0) = -1$

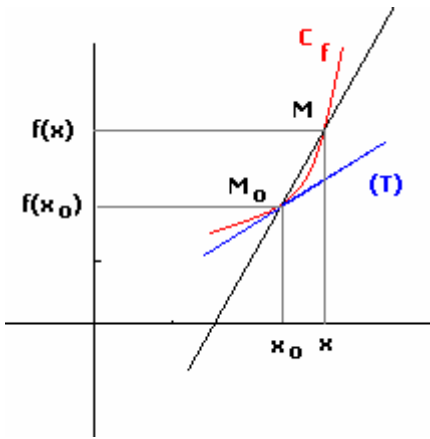
لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ ومنه f قابلة للاشتقاق في 0

4- التأويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0 و C_f منحنىها

نعتبر $M_0(x_0; f(x_0))$ و $M(x; f(x))$ نقطتين من C_f



المعامل الموجه للمستقيم (MM_0) هو $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

نلاحظ عندما تقترب M من M_0 (أي x تؤول إلى x_0) فإن $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تؤول إلى $f'(x_0)$

و بالتالي المستقيم (MM_0) يدور حول M_0 إلى أن ينطبق مع المستقيم (T) ذا المعامل الموجه $f'(x_0)$.

المستقيم (T) مماس للمنحنى C_f

معادلة (T) هي $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحنىها

قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس ل C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0

معادلته $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

تمرين: نعتبر $f(x) = x^3$

أدرس قابلية اشتقاق f في 2 و حدد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الأفصول 2

الجواب

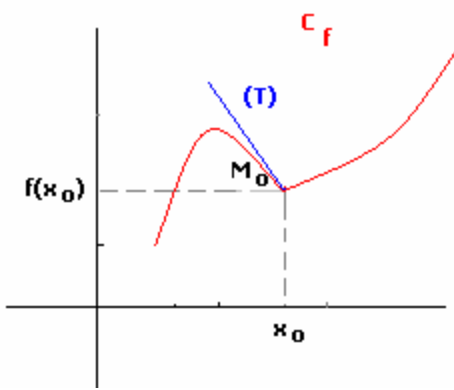
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

اذن f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2) = 12$

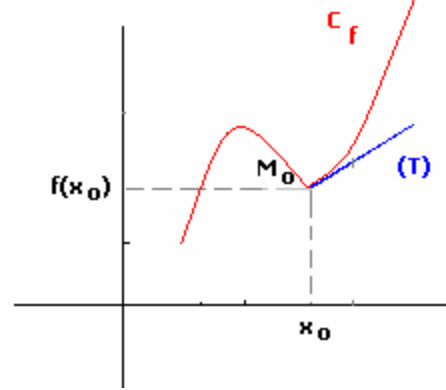
ومنه معادلة المماس هي $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ أي $y = 12(x - 2) + 8$

$$y = 12x - 16$$

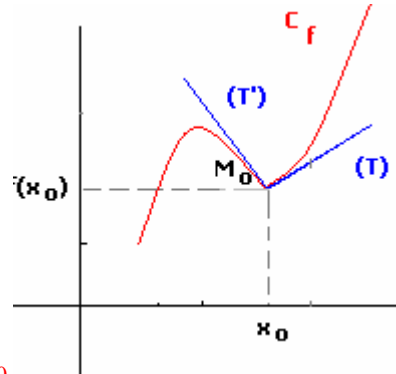
ب- نصف المماس



$$\begin{cases} (T): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$



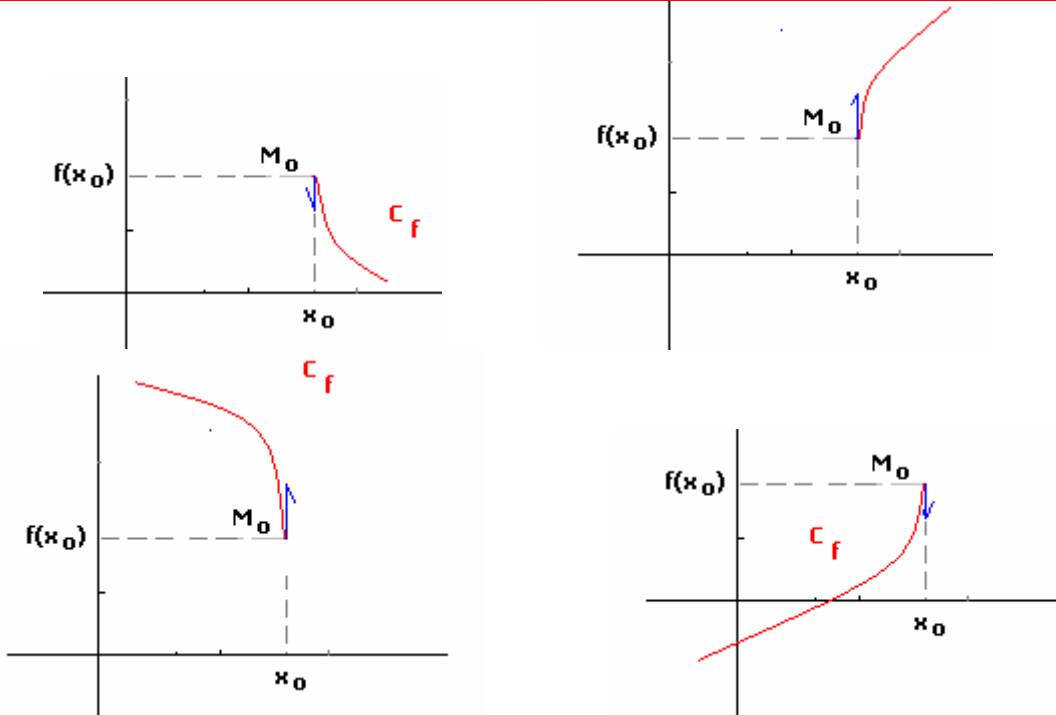
نقطة مزواة M_0

$$\begin{cases} (T): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \geq x_0 \\ (T'): y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) & x \leq x_0 \end{cases}$$

خاصة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأفصول x_0 معامل الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)

إذا كانت نهاية $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ هي $f'_{\pm\infty}$ في x_0 (على اليمين في x_0 أو على اليسار في x_0) فإن C_f يقبل مماس عمودي عند النقطة ذات الاصول x_0 (نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الاصول x_0)



تمرين نعتبر $f(x) = |x^2 - 1|$ و $g(x) = \sqrt{x}$

أدرس قابلية اشتقاق f على يمين ويسار 1 و أول النتائج هندسيا
أدرس قابلية اشتقاق g على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 *$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يمين 1 و $f'_d(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x - 1 = -2$$

ومنه f قابلة اشتقاق على يسار 1 و $f'_g(1) = -2$

نلاحظ $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ اذن f غير قابلة للاشتقاق في 1

(C_f) يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته $y = 2(x - 1)$.

(C_f) يقبل نصف مماس على يسار 1 معادلته $y = -2(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty *$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و (C_g) يقبل نصف مماس عمودي على يمين 0

5- الدالة المشتقة

أ- تعاريف

تعريف 1

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .

تعريف 2

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال $[a; b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ و على يمين a و على يسار b .

ملاحظة: بالمثل نعرف الاشتقاق على $]a; b[$ و على $[a; b]$

تعريف 3

لتكن قابلة للاشتقاق على المجال I
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

مثال: نعتبر $f(x) = x^2$

ندرس قابلية اشتقاق f و نحدد الدالة المشتقة

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = 2x_0 \text{ و } x_0 \text{ ومنه قابلة للاشتقاق في } x_0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

اذن f قابلة للاشتقاق في \mathbb{R} و $f'(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}$

ملاحظة:

يكون للمنحنى الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I مماس عند كل نقطة

من هذا المنحنى

ب- المشتقة الثانية - المشتقات المتتالية

لتكن f قابلة للاشتقاق مجال I

إذا الدالة f' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرمز لها بالرمز f''

إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق المجال I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثالثة أو

المشتقة من الرتبة 3 و نرمز لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$

و هكذا

نرمز للدالة المشتقة من الرتبة n حيث $n \in \mathbb{N}^*$ بالرمز $f^{(n)}$

مثال: نعتبر $f(x) = x^2$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = 2 \text{ و } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$$

6- عمليات على الدوال المشتقة

- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$f + g$ و $f \times g$ و λf و f^n دوال قابلة للاشتقاق على المجال I

و اذا كانت g لا تنعدم على I فان $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ قابلتان للاشتقاق على المجال I

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

على I

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x) \quad (\text{نبين ذلك بالترجع})$$

نبرهن $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\begin{aligned} (f \times g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \end{aligned}$$

و حيث $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

فان $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

7- الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية

* الدالة الثابتة: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = k$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$ و f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} إذن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
* الدالة $f: x \rightarrow x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1$ و f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} إذن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$
* الدالة $f: x \rightarrow ax + b$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a$ و f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} إذن $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$
* الدالة $f: x \rightarrow x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1}$ و f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $(x^n)' = nx^{n-1}$
* الدالة $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

إذن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x \times x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$

و $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

* الدالة $f: x \rightarrow \sqrt{x}$ لتكن $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

إذن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* و $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f غير قابلة للاشتقاق في 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 \cos(x_0 + h)) \times 2 \times \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x_0 \end{aligned}$$

إذن

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \sin x \quad \text{قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

* الدالة $f : x \rightarrow \cos x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad x \rightarrow \cos x \quad \text{قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

* الدالة $f : x \rightarrow \tan x$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x &= \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x &= 1 + \tan^2 x \quad \text{إذن} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad x \rightarrow \tan x \quad \text{قابلة للاشتقاق في كل نقطة من}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x \quad \text{و}$$

نتائج

* الدالة الحدودية قابلة للاشتقاق في \mathbb{R}

* الدالة الجدرية قابلة للاشتقاق في كل نقطة من حيز تعريفها

أمثلة

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + x - 2} \quad \text{نعتبر}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1; -2\}$$

f الدالة الجدرية ومنه f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R} - \{1; -2\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1; -2\} \quad f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(2x^3 - 3x)}{(x^2 + x - 2)^2} = \dots \quad \text{و}$$

8- مشتقة $f(ax+b)$ - مشتقة \sqrt{f}

مبرهنة

ليكن المجال J صورة المجال I بالدالة التآلفية $x \rightarrow ax+b$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على J فان $g : x \rightarrow f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و

$$\forall x \in I \quad g'(x) = af'(ax+b)$$

$$f(x) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{مثال: نعتبر}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{و} \quad x \rightarrow \sin x \quad \text{قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}$$

خاصة

لتكن f دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I

$$\forall x \in I \quad (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \text{ و } \sqrt{f} \text{ قابلة للاشتقاق على } I$$

مثال: نعتبر $f(x) = \sqrt{-x^2 + x}$

$$D_f = [0;1]$$

دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال $]0;1[$

$$\forall x \in]0;1[\quad f'(x) = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} \text{ و } f \text{ قابلة للاشتقاق على }]0;1[$$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

تمارين

1- أدرس اشتقاق f و حدد الدالة المشتقة في الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-x} * \quad f(x) = \frac{3x-1}{2x-2} * \quad f(x) = \frac{5}{x^2} * \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 4 *$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} * \quad f(x) = (\cos x)^5 * \quad f(x) = (x^2 + x)^5 *$$

$$f(x) = x^2 + x|x| * \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - x^2 & x > 0 \end{cases} *$$

$$2- \text{ نعتبر } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$$

أ- بين أن منحنى f يقبل مماسين موازيين للمستقيم الذي معادلته $y = -3x$
 ب- أكتب معادلتين هذين المماسين.

9- تطبيقات الدالة المشتقة

a- قابلية الاشتقاق و المطراف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$
 نعتبر f قابلة للاشتقاق في x_0 و تقبل مطرافا في x_0
 لنفترض أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند x_0

ومنه يوجد مجال مفتوح J مركزه x_0 ضمن I حيث $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$
 f قابلة للاشتقاق في x_0 ومنه $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ أي}$$

و حيث $\forall x \in J \quad f(x) \leq f(x_0)$ فان $\forall x \geq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ و $\forall x \leq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$
 ومنه $f'_g(x_0) \geq 0$; $f'_d(x_0) \leq 0$ أي أن $f'(x_0) \geq 0$; $f'(x_0) \leq 0$ اذن $f'(x_0) = 0$
 (إذا كانت f تقبل قيمة دنيا نسبية عند x_0 نتبع نفس الخطوات للحصول على نفس النتائج)

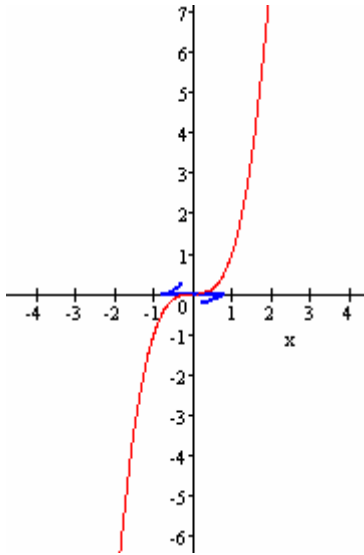
مبرهنة

لتكن f دالة معرفة على مجال فتوح I و $x_0 \in I$
 اذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و تقبل مطرافا في النقطة x_0 فان $f'(x_0) = 0$

ملاحظة:

المبرهنة لا تقبل المبرهنة العكسية
 مثال $f(x) = x^3$; $x_0 = 0$

f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$ و $f'(0) = 0$
 و مع ذلك f لا تقبل مطرافا عند 0



b- الاشتقاق ورتابة دالة

مبرهنة

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
 تكون f تزايدية (قطعا) على I إذا فقط اذا كانت الدالة المشتقة f' موجبة على I
 أي $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ (f' موجبة قطعا على I أي $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$)
 تكون f تناقصية (قطعا) على I إذا فقط إذا كانت الدالة المشتقة f' سالبة على I
 أي $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ (f' سالبة قطعا على I أي $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$)
 تكون f ثابتة على I إذا كانت الدالة المشتقة f' منعدمة على I أي $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 6x + 1$
 أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيرات f (في جدول التغيرات يجب تحديد النهايات)
 حدد مطاريف f ان وجدت

الجواب

* مجموعة تعريف $D_f = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^3)' - (6x)' + (1)' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) \text{ ومنه } f(x) = x^3 - 6x + 1 *$$

اشارة $f'(x)$ هي إشارة $x^2 - 2$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	0	-	0

ومنه f' موجبة على كل $[\sqrt{2}; +\infty[$ و $]-\infty; -\sqrt{2}]$ و سالبة على $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$
ومنه f تزايدية على كل $[\sqrt{2}; +\infty[$ و $]-\infty; -\sqrt{2}]$ و تناقصية على $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$
جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
f			$10\sqrt{2} + 1$	
				$-4\sqrt{2} + 1$
				$+\infty$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن f تقبل قيمة قصوى عند $-\sqrt{2}$ و دنيا عند $\sqrt{2}$
ملاحظة لتكن f قابلة للاشتقاق في x_0

f تقبل مطرافا في x_0 إذا و فقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تتغير إشارتها في مجال مفتوح يحتوي على x_0

10- المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$

تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها
المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية

تعريف

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم
المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ تسمى معادلة تفاضلية.
كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على \mathbb{R} و تحقق $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ تسمى حلا
للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$

أمثلة $y'' + 4y = 0$ و $y'' + \sqrt{2}y = 0$ و $y'' + \frac{3}{2}y = 0$ معادلات تفاضلية

خاصية

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم
الحل العام للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي $x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$
حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ملاحظة

حل المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ يرجع إلى تحديد الحل العام لهذه المعادلة

مثال

حل المعادلة $y'' + 4y = 0$

لدينا $\omega^2 = 4$ ومنه $\omega = 2$ يمكن أخذ $\omega = -2$ هذا لن يغير مجموعة الحلول
الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y: x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

معادلة تفاضلية خاصة

حل المعادلة $y'' = 0$

إذا كان $y'' = 0$ فان y' دالة ثابتة ومنه الحل العام لهذه المعادلة هو مجموعة الدوال $y: x \rightarrow ax + b$
حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$